



CENTRE DE RENNES  
IRISA

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 244

**SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ  
DU RÉSEAU HOMOGÈNE  
À UN RÉSEAU FERMÉ DE FILES  
D'ATTENTE À LOIS GÉNÉRALES**

**Raymond MARIE  
Gerardo RUBINO**

**Octobre 1983**

**RESUME** : Dans ce rapport, nous définissons rigoureusement le concept du "réseau homogène" ; ensuite, nous présentons le problème de l'existence et de l'unicité du réseau homogène comme un problème de point fixe. Des résultats analytiques sont obtenus pour quelques cas limites. On démontre l'unicité de la formule-produit par rapport à la distribution jointe de probabilité lorsqu'il y a plus de deux stations dans le réseau. On en déduit l'existence et l'unicité du réseau homogène pour les réseaux à 3 stations et 2 clients, résultat utilisé pour examiner quelques modèles concrets et étudier certains phénomènes intéressants. Nous donnons un nouveau procédé numérique pour la détermination du réseau homogène.

**ABSTRACT** : After a careful definition, the problem of the existence and uniqueness of the homogeneous network is presented as a fixed point problem. Exact analytical results are obtained for some limiting cases. The uniqueness of the product-form network with respect to the joint probability distribution is established when the number of stations is greater than two. A new numerical determination of the homogeneous network is proposed.



## 0. PLAN

1. Introduction.
2. Notations et définitions.
3. Définition du réseau homogène et remarques.
  - 3.1. Définition du réseau homogène.
  - 3.2. Remarques.
4. Un énoncé équivalent du problème.
5. Deux cas limites.
  - 5.1. Le cas  $N = 1$ .
  - 5.2. Le cas  $M = 2$ .
6. Unicité de la formule-produit pour  $M > 2$ .
7. Détermination du réseau homogène quand  $M=3$  et  $N=2$ .
8. Etude de quelques cas concrets et remarques.
  - 8.1. Transformation des stations exponentielles.
  - 8.2. Approximations par des réseaux G-N : un exemple.
  - 8.3. Remarque.
9. Calcul du réseau homogène.
10. Conclusion.
  - Bibliographie.
  - Annexe A.
  - Annexe B.
  - Annexe C.

## 1. INTRODUCTION

D'un point de vue théorique, la notion de "réseau homogène" est d'un grand intérêt pour les méthodes approchées de résolution de réseaux de files d'attente. Cette notion a été développée pour des réseaux fermés à lois de service générales pour lesquels on ne connaît pas de solution sous forme produit.

Fondamentalement, on peut dire que  $R_1$  est un réseau homogène au réseau  $R$  à lois de service générales, s'il est à forme produit et s'il a les mêmes distributions marginales que  $R$ .

L'existence d'un tel réseau homogène devra nous permettre de mieux comprendre les techniques approchées de résolution qui utilisent de diverses façons une hypothèse de formule-produit. L'éventuelle unicité a des conséquences directes sur les erreurs produites par ces méthodes.

La conjecture de l'existence et de l'unicité du réseau homogène pour tout réseau  $R$  à services quelconques a été faite par G. Balbo dans [Bal 79]. Cet auteur propose aussi un algorithme pour construire le réseau homogène.

Dans ce rapport, nous étudions la conjecture et l'algorithme. Disons d'abord que nous n'avons pas de réponse complète à la question de l'existence et de l'unicité. Cependant, nous avons obtenu quelques résultats intéressants.

Dans la section 3, nous donnons une définition rigoureuse du réseau homogène et nous en tirons quelques conséquences.

Dans la section 4, le problème est reformulé pour présenter l'existence et l'unicité du réseau homogène comme un problème de point fixe.

Dans la section 5, nous examinons deux cas limites. Nous montrons d'abord que quand il y a seulement un client dans le réseau, celui-ci a toujours un réseau homogène et ce réseau homogène est unique. Deuxièmement, nous montrons que si le réseau a deux stations et s'il contient plus d'un client, il y a toujours une infinité de réseaux homogènes différents (i.e. on n'a pas d'unicité).

Quand le nombre de stations est au moins trois, et pour une topologie donnée, nous montrons dans la section 6 que si  $R$  est un réseau à forme produit, alors il n'y a pas un autre réseau à forme produit avec la même distribution jointe. Ce résultat nous permet d'affirmer que prouver l'unicité du réseau homogène est équivalent à prouver que si deux réseaux à forme produit ont des distributions jointes différentes, alors ils n'ont pas les mêmes distributions marginales.

Dans la section 7, nous prouvons la conjecture pour les réseaux ayant trois stations et deux clients à l'aide du théorème de la section précédente, en construisant explicitement le réseau homogène. Ce résultat est utilisé dans la section 8 pour étudier analytiquement quelques cas précis. En particulier, nous considérons la situation dans laquelle il y a dans le réseau général  $R$  des stations avec un serveur exponentiel.

L'algorithme pour le calcul du réseau homogène est examiné dans la section 9. Plusieurs expériences ont montré des cas de non convergence. Dans ces cas, en considérant le problème comme un problème d'optimisation, nous avons toujours pu trouver un réseau homogène unique.

## 2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

Sauf mention contraire, on s'intéresse à la classe C des réseaux de files d'attente (RFA) caractérisés de la façon suivante : ils sont fermés, monoclasses et à routages fixes ; les stations sont à capacité infinie et possèdent un serveur unique ; dans chaque station le temps de service obéit à une loi de probabilité quelconque, ou bien le serveur est markovien à taux de service dépendant du nombre de clients dans la station ; la discipline dans la file est quelconque mais non préemptive : de cette façon, comme les clients sont statistiquement équivalents, la politique adoptée dans la station n'aura pas d'influence sur la valeur des paramètres qui nous intéresseront, à savoir, les distributions d'état dans le réseau ou dans les stations, ou les flux moyens, toutes grandeurs étant considérées en régime stationnaire. Enfin, on supposera que toute condition nécessaire pour l'ergodicité du processus stochastique associé au RFA est vérifiée.

Dans ce rapport, on ne s'intéresse donc qu'au régime stationnaire des RFA, régime dont l'existence est assurée par l'hypothèse d'ergodicité ; toutes les grandeurs stochastiques seront considérées dans cet état.

Pour un réseau R quelconque de classe C, on désigne par M le nombre de stations ( $M \geq 2$ ) et par N le nombre de clients ( $N \geq 1$ ) ; Q est la matrice stochastique  $M \times M$  des probabilités de routage ; elle est irréductible compte tenu de l'hypothèse d'ergodicité.

$\underline{x}$  est le vecteur ligne d'ordre M défini par :

$\underline{x} = \underline{x} Q$ ,  $\underline{x} > 0$ , et par la condition de normalisation  $\|\underline{x}\|_1 = 1$ . L'existence et l'unicité de  $\underline{x}$  sont assurées par l'hypothèse d'ergodicité ; compte tenu de la normalisation choisie,  $x_i$  est la fraction moyenne de visites faites par un client quelconque à la station i par rapport à l'ensemble des stations de R, en régime stationnaire.

$\pi$  désigne la distribution asymptotique du réseau R :

$$\pi : E \rightarrow (0, 1)$$

$$\text{où } E \triangleq \{ \underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M) \in \mathbb{N}^M / \sum_{1 \leq i \leq M} n_i = N \},$$

$n_i$  étant le nombre de clients dans la station i.

On note  $p_i$  la distribution asymptotique marginale correspondante à la station  $i$  :

$$p_i: \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow (0, 1)$$

$$n \mapsto p_i(n) \triangleq \sum_{\underline{n}/n_i = n} \pi(\underline{n}).$$

$S_i$  est le temps moyen de service dans la station  $i$ , et  $T_i$  est le flux moyen traversant cette station.

Par définition, le flux absolu  $T$  du réseau (ou flux total du réseau) est la somme des flux moyens de toutes les stations :

$$(1) \quad T \triangleq \sum_{1 \leq i \leq M} T_i$$

Compte tenu de la normalisation choisie pour définir  $\underline{x}$ , on a :

$$(2) \quad T_i = T x_i \text{ pour } i=1, 2, \dots, M.$$

Par ailleurs, si on applique la formule de Little au serveur de la station  $i$ , on obtient :

$$(3) \quad T_i = \frac{1 - p_i(0)}{S_i} \text{ pour } i=1, 2, \dots, M.$$

Finalement, si toutes les stations d'un réseau de classe  $C$  ont un serveur qui est soit markovien avec un taux de service fonction du nombre de clients dans la station (on dit aussi service "exponentiel à taux dépendant"), soit exponentiel (donc à taux de service fixe), alors le réseau est à forme produit : on utilisera la notation  $G-N$  ("Gordon-Newell", [GoN67]) pour désigner cette importante sous-classe de  $C$ .

### 3. DEFINITION DU RESEAU HOMOGENE ET REMARQUES

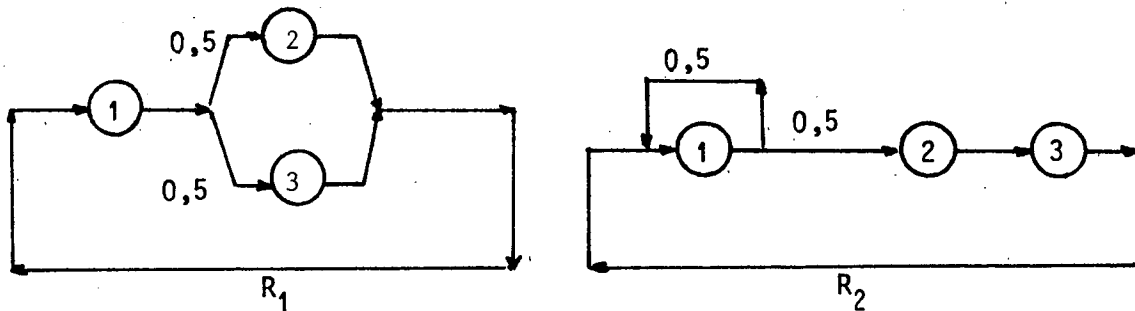
#### 3.1. Définition du réseau homogène

Soit  $R$  un réseau quelconque de la classe  $C$ . Un "réseau homogène" à  $R$ , noté  $H(R)$ , est un réseau G-N qui satisfait les conditions suivantes :

- (C1)  $H(R)$  a même topologie que  $R$ , i.e. même matrice de routages, et donc en particulier le même nombre de stations,
- (C2)  $H(R)$  a le même nombre de clients que  $R$ ,
- (C3) Les distributions marginales de  $H(R)$  sont identiques à celles de  $R$ ,
- (C4)  $H(R)$  et  $R$  ont même flux absolu.

#### 3.2. Remarques

3.2.1. La topologie d'un réseau G-N n'affecte la distribution jointe  $\pi$  -et donc les distributions marginales  $p_1, p_2, \dots, p_M$  que par l'intermédiaire du vecteur  $\underline{x}$ . Aussi, si  $H(R)$  est un réseau homogène à  $R$ , il existe en général une infinité de réseaux G-N qui satisfont les conditions (C2), (C3) et (C4), avec évidemment le même nombre de stations que  $R$ , car il existe en général une infinité de matrices stochastiques d'ordre  $M$  irréductibles, donnant le même vecteur  $\underline{x}$ . Par exemple, considérons les deux réseaux G-N dont les topologies sont données par la figure suivante :



Pour les deux topologies, on obtient  $\underline{x} = (0.5, 0.25, 0.25)$ . Si les stations de  $R_2$  sont les mêmes que celles de  $R_1$ , et si les deux réseaux ont le même nombre de clients, alors la distribution jointe  $\pi$  de  $R_2$  est la même que celle de  $R_1$ , et a fortiori les distributions marginales des deux réseaux sont identiques. Donc, si  $R_1$  vérifie (C2), (C3) et (C4) par rapport à un réseau avec trois stations, alors  $R_2$  vérifiera aussi ces trois conditions.



3.2.2. Supposant vérifiées les conditions (C1), (C2) et (C3), la condition (C4) admet plusieurs formes équivalentes telles que :

(C4)':  $\forall i \in \{1, 2, \dots, M\}$ , le flux moyen traversant la station  $i$  de  $H(R)$  est égal au flux moyen traversant la station  $i$  de  $R$ .

(C4)":  $\forall i \in \{1, 2, \dots, M\}$ , le temps moyen de service de la station  $i$  de  $H(R)$  est égal au temps moyen de service de la station  $i$  de  $R$ .

(C4)''':  $\exists i \in \{1, 2, \dots, M\}$  tel que le flux moyen traversant la station  $i$  de  $H(R)$  soit égal au flux moyen traversant la station  $i$  de  $R$ .

etc...

La preuve des équivalences est évidente d'après (1), (2) et (3).

3.2.3. La condition (C4) est une condition de normalisation : soit  $\varepsilon(\underline{\mu})$  un réseau G-N avec  $M$  stations,  $N$  clients, une matrice de routages  $Q$ , et des taux de service donnés par le vecteur  $\underline{\mu} > \underline{0}$  :

$$\underline{\mu} = (\mu_1(1), \mu_1(2), \dots, \mu_1(N), \mu_2(1), \dots, \mu_M(N)).$$

Pour toute station  $i$  du réseau  $\varepsilon(\underline{\mu})$ , notons respectivement  $p_i(\underline{\mu})$ ,  $T_i(\underline{\mu})$  et  $S_i(\underline{\mu})$  la distribution marginale, le flux moyen et le temps moyen de service ; soit  $T(\underline{\mu})$  le flux absolu de  $\varepsilon(\underline{\mu})$ .

Alors, pour tout scalaire  $\alpha$  strictement positif, on a comme corollaires immédiats des résultats classiques sur les réseaux à forme produit :

pour  $i=1, 2, \dots, M$  :

$$p_i(\alpha \underline{\mu}) \equiv p_i(\underline{\mu}), \quad T_i(\alpha \underline{\mu}) = \alpha T_i(\underline{\mu}), \quad S_i(\alpha \underline{\mu}) = \frac{S_i(\underline{\mu})}{\alpha},$$

et pour le flux absolu :  $T(\alpha \underline{\mu}) = \alpha T(\underline{\mu})$ .

Par conséquent, nous avons :

$$(4) \quad [\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R)] \Rightarrow \forall \alpha > 0 \quad [\varepsilon(\alpha \underline{\mu}) \text{ vérifie (C1), (C2) et (C3)}]$$

$$(5) \quad [\varepsilon(\underline{\mu}) \text{ vérifie (C1), (C2) et (C3)}] \Rightarrow [\varepsilon(\frac{T}{T(\underline{\mu})} \cdot \underline{\mu}) = H(R)]$$

$$\text{car } T(\frac{T}{T(\underline{\mu})} \cdot \underline{\mu}) = \frac{T}{T(\underline{\mu})} \cdot T(\underline{\mu}) = T.$$

Donc, si nous pouvons construire un réseau G-N vérifiant (C1), (C2) et (C3), la proposition 5 nous permet immédiatement de trouver  $H(R)$ .

3.2.4. Soit  $R$  un réseau de classe  $C$  avec  $N$  clients ; explicitons le nombre de clients dans  $R$  en utilisant l'indexation  $R^N$ . Soit  $\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R^N)$  et considérons maintenant  $R^{N'}$ , c'est-à-dire le "même" réseau -même topologie, mêmes stations- mais avec  $N'$  clients,  $N' < N$ .

Si  $\underline{\mu}'$  est le vecteur obtenu par troncature de  $\underline{\mu}$  en considérant les  $N'$  premiers clients :

$\underline{\mu}' = (\mu_1(1), \dots, \mu_1(N'), \mu_2(1), \dots, \mu_2(N'), \dots, \mu_M(1), \dots, \mu_M(N'))$ , alors on observe que, a priori, le réseau G-N construit avec la même topologie que  $R$ ,  $N'$  clients et les taux de service donnés par  $\underline{\mu}'$ , n'est pas homogène à  $R^{N'}$ . Dans tous les cas concrets examinés, on a constaté ce fait (voir section 8.3.).

#### 4. UN ENONCE EQUIVALENT DU PROBLEME

Il s'agit donc du problème de l'existence et de l'unicité de  $H(R)$  pour un réseau  $R$  de classe  $C$ . Les données sont  $M, \underline{x}, N$ , les distributions marginales  $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ , et le scalaire  $T$  ; l'inconnue est le vecteur  $\underline{\mu}$  de  $H(R)$ .

Etant donné que  $H(R)$  est un réseau  $G-N$ , trouver  $H(R)$  est équivalent à résoudre le système non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_i(n) = f_i^{\underline{\mu}}(n) \frac{G_i^{\underline{\mu}}(N-n)}{G^{\underline{\mu}}(N)} & \text{pour } i=1,2,\dots,M \\ & n=0,1,\dots,N. \\ T = \frac{G^{\underline{\mu}}(N-1)}{G^{\underline{\mu}}(N)} \end{array} \right.$$

où, pour  $i=1,2,\dots,M$  :

$$f_i^{\underline{\mu}}(n) \triangleq \pi_{1 \leq \ell \leq n} \frac{x_i}{\mu_i(\ell)} \text{ pour } n=1,2,\dots,N ; f_i^{\underline{\mu}}(0) \triangleq 1 ;$$

$$G_i^{\underline{\mu}}(n) \triangleq \left( \bigotimes_{\substack{1 \leq j \leq M, \\ j \neq i}} f_j^{\underline{\mu}} \right)(n) \text{ pour } n=1,2,\dots,N ; G_i^{\underline{\mu}}(0) \triangleq 1 ;$$

$$\text{et } G^{\underline{\mu}}(n) \triangleq \left( \bigotimes_{1 \leq j \leq M} f_j^{\underline{\mu}} \right)(n) \text{ pour } n=1,2,\dots,N ; G^{\underline{\mu}}(0) \triangleq 1 ;$$

$\otimes$  désigne l'opérateur de convolution.

Considérons maintenant l'application  $\emptyset$  suivante :

$$\emptyset : \mathbb{R}_{*+}^{MN} \rightarrow \mathbb{R}_{*+}^{MN}$$

$\underline{\mu} \mapsto \emptyset(\underline{\mu}) = \underline{v}$  défini par :

$$v_i(n) \triangleq \frac{p_i(n-1)}{p_i(n)} \lambda_i^{\underline{\mu}}(n-1) \text{ pour } i=1,2,\dots,M \\ n=1,2,\dots,N$$

où  $\mathbb{R}_{*+}^{MN} \triangleq \{(z_1, z_2, \dots, z_{MN}) / z_h \in \mathbb{R}, z_h > 0 \text{ pour } 1 \leq h \leq MN\}$

et  $\lambda_i^{\underline{\mu}}(k)$  est le taux d'arrivée à la station  $i$  conditionné par rapport au nombre  $k$  de clients dans la station.

Alors, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1:

$H(R)$  existe  $\Leftrightarrow \emptyset$  a un point fixe.

Plus précisément, on peut énoncer une proposition 2 qui entraîne immédiatement la proposition 1 :

Proposition 2:

(i)  $[\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R)] \Rightarrow \underline{\mu}$  est un point fixe de  $\emptyset$ .

(ii)  $\underline{\mu}$  est un point fixe de  $\emptyset \Rightarrow [\varepsilon(\frac{\underline{\mu}}{T(\underline{\mu})}) = H(R)]$ .

Preuve :

On remarque d'abord que

$$\forall \underline{\mu} > 0, \forall \alpha > 0, \emptyset(\alpha \underline{\mu}) = \alpha \emptyset(\underline{\mu}) ;$$

ceci découle du fait que

$$\lambda_i^{\alpha \underline{\mu}}(k) = \alpha \lambda_i^{\underline{\mu}}(k) \text{ pour } i=1,2,\dots,M \\ k=0,1,\dots,N-1$$

Donc, si  $\underline{\mu}$  est un point fixe de  $\emptyset$ ,  $\alpha \underline{\mu}$  aussi,  $\forall \alpha > 0$ .

Nous allons maintenant considérer successivement les deux parties de la proposition 2 :

(i) Soit  $\underline{\mu} > 0$  tel que  $\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R)$  ; soit  $q_i^{\underline{\mu}}$  la distribution marginale de la station  $i$  dans  $\varepsilon(\underline{\mu})$ .

Comme  $\varepsilon(\underline{\mu})$  est un réseau G-N, on peut écrire :

$$(*) \mu_i(n) = \frac{q_i^{\underline{\mu}}(n-1)}{q_i^{\underline{\mu}}(n)} \cdot \lambda_i^{\underline{\mu}}(n-1) \text{ pour } i=1,2,\dots,M \\ n=1,2,\dots,N$$

mais  $\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R)$ , d'où, par définition du réseau homogène :

$$q_i^{\underline{\mu}} \equiv p_i \text{ pour } i=1,2,\dots,M.$$

En remplaçant les  $q_i$  par les  $p_i$  dans (\*), on a :

$$(**) \quad \mu_i(n) = \frac{p_i(n-1)}{p_i(n)} \lambda_i^{\mu}(n-1) \text{ pour } i=1,2,\dots,M \\ n=1,2,\dots,N$$

Ce qui signifie que  $\underline{\mu}$  est un point fixe de  $\Phi$ .

(ii) Soit  $\underline{\mu}$  un point fixe de  $\Phi$  ; alors on a (\*\*). Mais dans  $\varepsilon(\underline{\mu})$  on peut écrire (\*) ; on en déduit que :

$$\frac{q_i^{\underline{\mu}}(n-1)}{q_i^{\underline{\mu}}(n)} = \frac{p_i(n-1)}{p_i(n)} \text{ pour } i=1,2,\dots,M, \\ n=1,2,\dots,N$$

Il est immédiat que si  $a$  et  $b$  sont deux distributions de probabilité strictement positives, définies sur l'ensemble  $\{0,1,\dots,N\}$ , on a :

$$\left[ \frac{a(n-1)}{a(n)} = \frac{b(n-1)}{b(n)} \text{ pour } n=1,\dots,N \right] \Leftrightarrow \left[ \frac{a(n)}{a(0)} = \frac{b(n)}{b(0)} \text{ pour } n=1,\dots,N \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [a=b]$$

Donc,  $q_i \equiv p_i$  pour  $i=1,2,\dots,M$ .

Alors,  $\varepsilon(\underline{\mu})$  vérifie les conditions (C1), (C2) et (C3) ; par conséquence (cf(5)) on a :

$$\varepsilon\left(\frac{T}{T(\underline{\mu})} \cdot \underline{\mu}\right) = H(R)$$

Considérons maintenant le domaine  $D(T)$  contenu dans  $\mathbb{R}_{*+}^{MN}$ , défini par :

$$D(T) \triangleq \{ \underline{\mu} \in \mathbb{R}_{*+}^{MN} / T(\underline{\mu}) = T \}$$

Soit  $\Phi$  la restriction de  $\Phi$  à  $D(T)$ . Alors, nous avons les propositions suivantes, corollaires immédiats de la proposition 2 :

Proposition 3 :

$\Phi$  a un point fixe  $\Leftrightarrow H(R)$  existe, et  $H(R) = \varepsilon(\underline{\mu})$ .

Proposition 4 :

$\Phi$  a un point fixe unique  $\underline{\mu} \Leftrightarrow \exists ! H(R)$ , et  $H(R) = \varepsilon(\underline{\mu})$ .

## 5. DEUX CAS LIMITES

Dans cette section, nous allons d'abord montrer l'existence et l'unicité de  $H(R)$  quand  $N=1$  ; ensuite, nous montrerons l'existence et la non unicité de  $H(R)$  lorsque  $M=2$  et  $N>1$ .

### 5.1. Le cas $N=1$

Soit  $\underline{e}_i$  le vecteur ligne d'ordre  $M$  défini par :

$\underline{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{iM})$  pour  $i=1, 2, \dots, M$  où  $\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker.

Si  $N=1$ , il n'y a pas de phénomène d'attente dans le réseau, et on sait que :

$$\pi(\underline{e}_i) = p_i(1) = \frac{x_i S_i}{G} \text{ pour } i=1, 2, \dots, M$$

$$\text{avec } G \triangleq \sum_{1 \leq j \leq M} x_j S_j$$

Ceci entraîne :

$$T = \sum_{1 \leq i \leq M} \frac{1 - p_i(0)}{S_i} = \sum_{1 \leq i \leq M} \frac{p_i(1)}{S_i} = \sum_{1 \leq i \leq M} \frac{x_i}{G} = \frac{1}{G}$$

L'expression des nombres  $\pi(\underline{e}_i)$  pour  $i=1, 2, \dots, M$ , montre que  $R$  a une forme produit, et que donc  $R=H(R)$ .

Le vecteur  $\underline{\mu}$  de  $H(R)$  est  $(\frac{1}{S_1}, \frac{1}{S_2}, \dots, \frac{1}{S_M})$ .

Pour l'unicité, il suffit de voir que si  $\varepsilon(\underline{\mu}') = H(R)$  avec  $\underline{\mu}' = (\frac{1}{S'_1}, \frac{1}{S'_2}, \dots, \frac{1}{S'_M})$ , on doit avoir :

$$p_i(1) = \frac{x_i S_i}{G} = T x_i S_i = T x_i S'_i \text{ pour } i=1, 2, \dots, M$$

donc  $S'_i = S_i$  pour  $i=1, 2, \dots, M$ .

### 5.2. Le cas M=2

Soit R un réseau de classe C avec 2 stations. Notons a (respectivement b) la distribution marginale de la station 1 (respectivement station 2) dans R.

Comme M=2, on a :

$$(*) \quad b(n) = a(N-n) \text{ pour } n=0,1,\dots,N.$$

Soit un réseau  $\varepsilon(\underline{\mu})$  vérifiant les conditions (C1) et (C2) ; pour ce réseau, nous avons :

$$\lambda_i^{\underline{\mu}}(n) = \frac{x_i}{x_{3-i}} \mu_{3-i}(N-n) \text{ pour } i=1,2 \\ n=0,1,\dots,N-1$$

Ici, l'équation  $\underline{\mu} = \emptyset(\underline{\mu})$  s'écrit :

$$(i) \quad \mu_1(n) = \frac{a(n-1)}{a(n)} \frac{x_1}{x_2} \mu_2(N-n+1) \text{ pour } n=1,\dots,N \\ (ii) \quad \mu_2(n) = \frac{b(n-1)}{b(n)} \frac{x_2}{x_1} \mu_1(N-n+1) \text{ pour } n=1,\dots,N$$

Or, les N équations (i) et les N équations (ii) constituent deux systèmes linéaires équivalents. En effet, supposons par exemple, que le vecteur  $\underline{\mu}$  vérifie (i) ; prenons  $n \in \{1,2,\dots,N\}$  et calculons le second membre de (ii) :

On a :

$$\frac{b(n-1)}{b(n)} = \frac{a(N-n+1)}{a(N-n)} \quad (\text{d'après } (*))$$

$$\mu_1(N-n+1) = \frac{a(N-n)}{a(N-n+1)} \frac{x_1}{x_2} \mu_2(n) \quad (\text{d'après } (i))$$

et donc :

$$\frac{b(n-1)}{b(n)} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \mu_1(N-n+1) = \frac{a(N-n+1)}{a(N-n)} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{a(N-n)}{a(N-n+1)} \cdot \frac{x_1}{x_2} \mu_2(n) = \mu_2(n).$$

Ainsi (i) est un système linéaire avec N équations et 2N inconnues ; on peut par exemple, choisir un vecteur  $(\mu_i(1), \dots, \mu_i(N))$  quelconque,  $i=1$  ou  $2$ , et calculer  $\mu_{3-i}(1), \dots, \mu_{3-i}(N)$  directement de ces équations. On voit donc que le degré de liberté du système est N.

Si on ajoute maintenant la condition de normalisation (C4) qui peut s'écrire :

$$\sum_{1 \leq n \leq N} a(n) \mu_1(n) = \frac{1-a(0)}{S_1} \text{ car } \frac{1-a(0)}{S_1} = T_1 = T x_1,$$

on a N-1 degrés de liberté pour trouver un point fixe de  $\Phi$ .

Donc, si  $N > 1$ ,  $H(R)$  existe toujours et il n'est pas unique : il y a une infinité de réseaux homogènes à un même RFA général R. Si  $N=1$ ,  $H(R)$  existe et il est unique (ce qui correspond alors au cas 5.1. traité précédemment).



## 6. UNICITE DE LA FORMULE PRODUIT POUR $M > 2$

Comme préliminaire à l'étude de l'unicité du réseau homogène (ce qui reste toujours une question ouverte), nous avons considéré une autre question : étant donné un réseau G-N avec taux de service  $\underline{\mu}_1$ , existe-t-il un autre réseau G-N avec la même topologie, même nombre de clients, et taux de service  $\underline{\mu}_2$  non colinéaire avec  $\underline{\mu}_1$ , tel que les deux réseaux aient la même distribution stationnaire jointe ?

Noter qu'une réponse affirmative aurait comme conséquence la non unicité du réseau homogène : il suffit de remarquer que si  $\underline{\mu}_1$  et  $\underline{\mu}_2$  ne sont pas colinéaires,  $\forall T > 0$  on a :

$$\frac{T}{T(\underline{\mu}_1)} \cdot \underline{\mu}_1 \neq \frac{T}{T(\underline{\mu}_2)} \cdot \underline{\mu}_2,$$

et que si deux RFA ont même distribution jointe, a fortiori ils ont mêmes distributions marginales par station.

Comme le montre le théorème suivant, cette question reçoit une réponse négative si  $M > 2$ .

### Théorème 1

Etant donné un réseau R de type G-N avec N clients, des taux de service donnés par le vecteur  $\underline{\mu}$ , et une distribution jointe  $\pi$  :

(i) Si  $M=2$  et si  $N > 1$ , il existe une infinité de réseaux G-N avec N clients, des taux de service non colinéaires entre eux, de même topologie que R, et admettant  $\pi$  comme distribution jointe.

(ii) Si  $M > 2$ , il n'existe pas de réseau G-N avec N clients, de même topologie que R, et avec un vecteur des taux de service non colinéaire avec  $\underline{\mu}$ , admettant  $\pi$  comme distribution stationnaire jointe. On arrive à la même conclusion si  $M=2$  et  $N=1$ .

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans l'Annexe A.

Comme corollaire de ce résultat, nous pouvons dire que le problème de l'unicité du réseau homogène serait résolu si on pouvait démontrer la proposition (6) suivante :

- on note  $FP(E)$  l'ensemble des distributions de probabilité définies sur  $E$  et à forme produit.

(6)  $\forall \pi, \pi'$  dans  $FP(E)$  :

$$[(\pi = \pi') \wedge (M > 2) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, M\} : [p_i \neq p'_i]]$$

Nous n'avons pas pu prouver cette proposition, ni sa négation.

## 7. DETERMINATION DU RESEAU HOMOGENE QUAND M=3 ET N=2

Cette situation est résolue analytiquement ; le résultat sera utilisé dans la section suivante pour examiner en détail quelques cas concrets.

Nous avons le théorème suivant :

### Théorème 2 :

Pour tout réseau R de la classe C, avec trois stations et deux clients, H(R) existe toujours et il est unique ; le vecteur  $\underline{\mu}$  des taux de service de H(R) est donné par les formules suivantes :

$$(7) \quad \mu_i(1) = \frac{2T}{D} x_i d_i \text{ pour } i=1,2,3$$

$$(8) \quad \mu_i(2) = \frac{T}{D} \frac{x_i d_j d_k}{p_i(2)} \text{ pour } i=1,2,3 \\ j \neq k, j \neq i, k \neq i$$

$$\text{avec } d_\ell \triangleq \left( \sum_{1 \leq i \leq 3} p_i(1) \right) - 2p_\ell(1) \text{ pour } \ell=1,2,3$$

$$\text{et } D \triangleq d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3 = 2 \sum_{i < j} p_i(1) p_j(1) - \sum_k p_k^2(1).$$

### Preuve

Tout d'abord, nous allons montrer que dans ce cas il existe une bijection entre les distributions marginales de R et la distribution jointe  $\pi$ . La détermination de  $\pi$  à partir des  $p_i$   $i=1,2,3$  correspond à la résolution du système linéaire suivant :

$$\sum_{\underline{n}/n_i=k} \pi(n_1, n_2, n_3) = p_i(k) \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ k=0,1,2 \end{matrix}$$

Ce système a 9 équations mais seulement 6 d'entre elles sont indépendantes du fait que, pour chaque  $i \in \{1,2,3\}$ , les données doivent vérifier :  $p_i(0) + p_i(1) + p_i(2) = 1$ . Il a aussi 6 inconnues, les nombres  $\pi(\underline{n})$ . La solution unique de ce système est :

$$\text{d'abord } \pi(2e_i) = p_i(2) \text{ pour } i=1,2,3$$

puis, les 3 équations :

$$\pi(1,1,0) + \pi(1,0,1) = p_1(1)$$

$$\pi(1,1,0) + \pi(0,1,1) = p_2(1)$$

$$\pi(0,1,1) + \pi(1,0,1) = p_3(1)$$

donnent les  $\pi(\underline{e}_i + \underline{e}_j)$  pour  $i \neq j$  ; nous obtenons :

$$\pi(\underline{e}_i + \underline{e}_j) = \frac{d_k}{2} \quad i \neq j, k \neq i, j \neq i.$$

On peut noter que le fait que  $\pi$  soit une distribution de probabilité sur E strictement positive entraîne la condition nécessaire suivante sur les données :

$$(9) \quad p_i(1) < \sum_{j/j \neq i} p_j(1) \text{ pour } i=1,2,3$$

On peut ajouter que s'il y a un nombre  $M \geq 2$  quelconque de stations dans le réseau, toujours avec  $N=2$ , cette condition est vérifiée :

$$\begin{aligned} \sum_{j/j \neq i} p_j(1) &= \sum_{j/j \neq i} \sum_{k/k \neq j} \pi(\underline{e}_j + \underline{e}_k) = \\ &= \sum_{j/j \neq i} \left[ \pi(\underline{e}_j + \underline{e}_i) + \sum_{k/k \neq i, j} \pi(\underline{e}_j + \underline{e}_k) \right] = \\ &= p_i(1) + \sum_{j/j \neq i} \sum_{k/k \neq i, j} \pi(\underline{e}_j + \underline{e}_k) > p_i(1). \end{aligned}$$

Autrement dit, si M distributions de probabilité  $p_1, p_2, \dots, p_M$  sur  $\{0,1,2\}$  sont les distributions marginales d'un RFA de la classe C, il y a nécessairement certaines propriétés toujours vérifiées :

$$\forall i \in \{1,2,\dots,M\} :$$

$$0 < p_i < 1,$$

$$\sum_{1 \leq i \leq M} [p_i(1) + 2p_i(2)] = 2 \quad (\text{car le nombre de clients dans le réseau est } 2, \\ \text{et pour } i=1,2,\dots,M, p_i(1) + 2p_i(2) \text{ est le nombre} \\ \text{moyen de clients dans la station } i),$$

et la condition (9).

Revenons au cas  $M=3$  et  $N=2$ . Comme conséquence de l'existence de la bijection entre  $\pi$  et  $\{p_1, p_2, p_3\}$ , si  $H(R)$  existe, alors  $R$  et  $H(R)$  ont la même distribution jointe, car par définition ils ont les mêmes distributions marginales. Donc, d'après le théorème 1, si  $H(R)$  existe, il est unique.

Etant donné que  $H(R)$  doit avoir, s'il existe, la même distribution jointe  $\pi$  du réseau  $R$ , son vecteur des taux de service  $\underline{\mu}$  doit forcément être le résultat de l'algorithme du théorème 1 appliqué à  $\pi$ , avec ensuite la normalisation telle que le flux total soit égal au flux total  $T$  de  $R$ .

Dans l'Annexe B nous montrons, d'abord, que l'algorithme est applicable sans aucune ambiguïté compte tenu du fait que  $M=3$  et  $N=2$ . Ainsi  $\underline{\mu}$  est explicitement déterminé, ce qui donne les formules (7) et (8). Enfin, on vérifie que  $\varepsilon(\underline{\mu})$  a la même distribution jointe que  $R$  ; donc,  $H(R)$  existe et  $H(R) = \varepsilon(\underline{\mu})$ .

Comme conclusion de cette section, nous pouvons donner le corollaire suivant : "tout réseau  $R$  de la classe  $C$  avec trois stations et deux clients a une distribution en forme produit" ; cependant, chaque facteur de la forme produit dépend en général des caractéristiques de toutes les stations du réseau.

## 8. ETUDE DE QUELQUES CAS CONCRETS ET REMARQUES

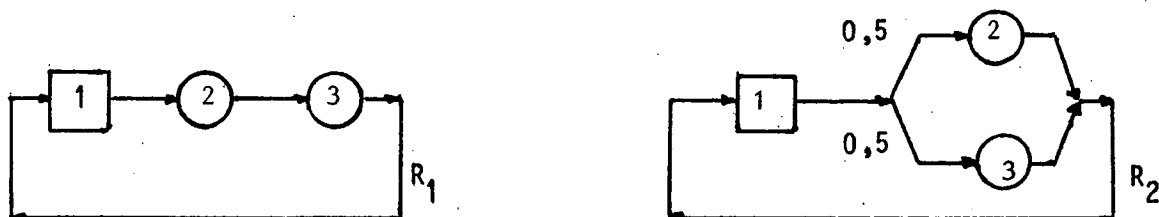
### 8.1. Transformation des stations exponentielles

Des résultats expérimentaux [Bal79] ont montré que lorsque dans  $R$  il y a des stations exponentielles, les stations correspondantes dans  $H(R)$  sont à taux de service dépendant, i.e. ces stations ne se conservent pas quand on passe de  $R$  à  $H(R)$ .

Ce phénomène a une importance évidente à cause du fait suivant : les techniques approchées les plus performantes pour la résolution d'un réseau  $R$  de la classe  $C$  fournissent un réseau  $R'$  de type  $G-N$  comme approximation de  $R$  ; or, si dans  $R$  il y a des stations exponentielles, pour toutes ces techniques ces stations restent inchangées dans  $R'$ .

Puisque pour les réseaux où  $M=3$  et  $N=2$  nous disposons de résultats analytiques, plusieurs exemples ont été considérés pour étudier ce phénomène, et on a pu observer en général la non conservation des stations exponentielles quand on passe de  $R$  à  $H(R)$ . Cependant, ceci n'est pas toujours vrai comme on pourra le voir dans l'exemple suivant.

Soit deux réseaux  $R_1$  et  $R_2$  dont les topologies respectives sont données par la figure suivante :



Dans les deux réseaux, la distribution du temps de service dans la station 1 est Erlang-2 avec moyenne  $2/\eta$  ; les stations 2 et 3 sont exponentielles de moyenne  $1/\mu$ . Dans  $R_1$  et dans  $R_2$ , il y a 2 clients.

Pour ces deux RFA, les différents paramètres qui nous intéressent peuvent être calculés exactement via le processus markovien dont les états sont de la forme  $(n_1, h_1; n_2, n_3)$  où  $h_1$  est la phase du serveur Erlang-2. En particulier, on peut calculer les probabilités marginales et le flux absolu, et alors, en appliquant les formules de la section précédente, déterminer analytiquement les réseaux homogènes respectifs.

Intuitivement, dans  $R_1$  les distributions  $p_2$  et  $p_3$  ne sont pas identiques, à cause de la position différente des stations 2 et 3 dans le réseau (et du fait que les stations sont elles-mêmes identiques). Ceci est confirmé par le calcul exact des distributions dans le réseau  $R_1$  proposé ; par exemple nous avons :

$$p_2(2) = \frac{1+4\alpha+2\alpha^2}{A} \quad \text{et} \quad p_3(2) = \frac{1+4\alpha+3\alpha^2}{A}$$

avec  $A = 3+16\alpha+28\alpha^2+28\alpha^3+16\alpha^4+4\alpha^5$ , et  $\alpha = \frac{\mu}{\eta}$ .

Par conséquent, deux stations 2 et 3 identiques dans  $R_1$  donneront deux stations 2 et 3 différentes dans  $H(R_1)$  (observer que dans un réseau G-N la topologie n'intervient qu'à travers le vecteur  $\underline{x}$  -cf. section 3.2.- et ici  $x_2=x_3$ ). Comme de plus, le flux moyen doit être conservé par station, l'une au moins des stations 2 et 3 de  $H(R_1)$  est à taux de service dépendant.

Enfin, le calcul direct confirme que les deux stations 2 et 3 dans  $H(R_1)$  sont à taux dépendant,  $\forall \mu$  et  $\forall \eta$  ; par exemple, pour  $\mu = \eta = 1$  les valeurs exactes sont :

station i	$\mu_i(1)$	$\mu_i(2)$
1	72/187	3780/5797
2	180/187	216/187
3	189/187	180/187

Par contre, pour  $R_2$ , les stations 2 et 3 dans  $H(R_2)$  sont les mêmes que dans le réseau original : exponentielles de taux  $\mu$ . La station 1 dans  $H(R_2)$  a le taux de service suivant :

$$\mu_1(1) = \frac{\eta^2}{\mu+2\eta} \quad \mu_1(2) = \frac{\eta(\mu+2\eta)}{2\mu+3\eta}$$

Il est intéressant de remarquer le fait suivant : soit un réseau R de classe C où les lois de service sont des lois de Cox. Quelque soit ce réseau R, on peut lui associer un réseau R' de type G-N avec la même topologie, le même nombre de clients, et comme vecteur  $\underline{\mu}$ , les taux de service conditionnels de R. Plus précisément : pour chaque station i de R,  $i=1,2,\dots,M$ , on définit le taux de service conditionnel  $v_i(n)$  par rapport au nombre n de clients dans la station par :

$$(10) \quad v_i(n) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}(\text{une fin de service en } (t, t+\Delta t) / n \text{ clients en } i \text{ à l'instant } t)}{\Delta t}$$

Dans un tel réseau, cette quantité ne dépend pas de  $t$ . On peut l'écrire d'une autre façon, en considérant le processus markovien associé à  $R$  défini sur les états de la forme  $\underline{n} = (n_1, h_1; n_2, h_2; \dots; n_M, h_M)$  où  $h_i$  est la phase du serveur  $i$ ; notons  $\pi$  la distribution stationnaire associée à ce processus de Markov. Pour la station  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ , on note  $H_i$  le nombre de phases de la loi de service,  $\mu_{ih}$  le taux de la phase  $h$  ( $1 \leq h \leq H_i$ ) et  $1-a_{ih}$  la probabilité de finir le service après la phase  $h$  ( $a_{iH_i}=0$ ). Alors, on peut écrire :

$$v_i(\underline{n}) = \frac{\sum_{\underline{n}/n_i=n} \pi(\underline{n}) \mu_{ih_i} (1-a_{ih_i})}{\sum_{\underline{n}/n_i=n} \pi(\underline{n})}$$

Or, il est clair que, a priori,  $H(R) \neq R'$  : il suffirait de remarquer que dans  $R'$  les stations exponentielles se conservent -immédiat d'après (10) - et de considérer le réseau  $R_1$ . Dans le cas de  $R_2$ , par contre, on a bien  $H(R_2)=R'_2$ .

Si dans  $R_1$  on prend  $\mu = \eta = 1$ , le taux de service de la station 1 dans  $R'_1$  (i.e. le taux de service conditionnel de la station 1 dans  $R_1$ ) est :

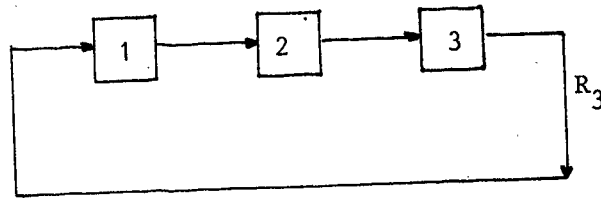
$$\mu_1(1) = \frac{16}{41}, \quad \mu_1(2) = \frac{20}{31}.$$

## 8.2. Approximations par des réseaux G-N : un exemple

Supposons que  $R$  soit un réseau de la classe  $C$  avec des stations exponentielles. Supposons que  $H(R)$  existe et qu'il soit unique, et que le phénomène de transformation des stations exponentielles considéré dans la section précédente soit vérifié. Alors, il est clair que toute méthode approchée qui propose un réseau G-N comme approximation de  $R$ , et qui ne modifie pas les taux des stations exponentielles éventuelles, ne pourra pas fournir les distributions marginales exactes de  $R$  [Bal79].

Comme complément et à titre d'exemple, nous avons regardé le réseau  $R_3$  suivant, où il n'y a pas de station exponentielle :





Les trois stations sont identiques et ont un serveur Erlang-2 de moyenne  $2/\eta$  ; il y a deux clients dans le réseau.

Par symétrie, les paramètres sont identiques dans les trois stations. Le processus markovien associé nous permet de calculer les distributions et flux exacts, et les formules de la section 7 nous donnent  $H(R_3)$ .

Nous allons comparer ces valeurs avec les paramètres des 4 réseaux G-N suivants :

$R'_3$  : réseau associé canoniquement en remplaçant chaque serveur par un serveur markovien dont le taux de service est le taux de service conditionnel (exact) dans  $R_3$ .

$R''_3$  : réseau limite dans la méthode itérative de Marie [Mar79], appliquée à  $R_3$ .

$R'''_3$  : réseau obtenu par la méthode EPF de Shum [Shu76], appliquée à  $R_3$ .

$E_3$  : réseau exponentiel, où toutes les stations de  $R_3$  sont remplacées par un serveur exponentiel de taux de service égal à  $2/\eta$ .

Dans l'Annexe C, on trouvera un rappel des principes des deux techniques approchées considérées, ainsi que les détails du calcul analytique exact de  $R''_3$  et  $R'''_3$ . Pour ce réseau particulier, on trouve que  $R''_3 \equiv R'''_3$ .

. Pour le réseau  $H(R_3)$  les taux de service sont :

$$\mu(1) = \frac{23}{54} \eta, \quad \mu(2) = \frac{23}{30} \eta.$$

. Le réseau  $R'_3$  a les taux de service suivants :

$$\mu(1) = \frac{4}{9} \eta, \quad \mu(2) = \frac{7}{10} \eta$$

. Les réseaux  $R_3''$  et  $R_3'''$  sont caractérisés par les mêmes taux de service ; on a :

$$\mu(1) = (\sqrt{6}-2)\eta, \quad \mu(2) = \frac{1}{4-\sqrt{6}} \eta = \frac{4+\sqrt{6}}{10} \eta$$

Au niveau des probabilités marginales, les résultats sont :

	$R_3$	$R_3'$	$R_3''=R_3'''$	$E_3$
p(0)	.452	.453	.470	.500
p(1)	.429	.408	.393	.333
p(2)	.119	.129	.137	.167
T	0.274 $\eta$	0.272 $\eta$	0.265 $\eta$	.250 $\eta$

Il est sans doute superflu de rappeler que  $H(R_3)$  a les mêmes probabilités marginales que  $R_3$  par définition...

### 8.3. Remarque

On peut facilement constater ici, le fait mentionné dans la section 3.2.4., en comparant les réseaux homogènes  $H(R_1^2)$  et  $H(R_1^1)$  (rappelons que l'indice supérieur correspond dans la notation de la section 3.2.4. au nombre de clients dans le réseau).

Par exemple, pour  $R_3$  :

avec 2 clients, dans  $H(R_3^2)$  on a  $\mu(1) = \frac{23}{54} \eta$  ;

avec 1 client,  $H(R_3^1)$  est caractérisé par :  $\mu(1) = \frac{1}{2} \eta$

## 9. CALCUL DU RESEAU HOMOGENE

Le seul algorithme proposé pour construire  $H(R)$  à partir des distributions marginales de  $R$  est celui donné par Balbo dans [Bal 79]. Dans le cadre de la reformulation du problème que nous donnons dans la section 4, cet algorithme peut se présenter simplement, de la façon suivante :

il s'agit de trouver un point fixe de l'application  $\emptyset$  sur  $\{\underline{\mu} > 0\}$  ; pour cela, on utilise la récurrence :

$$\underline{\mu}^{(k+1)} \triangleq \emptyset(\underline{\mu}^{(k)}) \quad k \geq 0$$

avec le vecteur initial  $\underline{\mu}^{(0)}$  donné par :

$$\mu_i^{(0)}(n) \triangleq \frac{1}{s_i} \quad \text{pour } i=1,2,\dots,M \\ n=1,2,\dots,N ;$$

l'algorithme s'arrête dès que  $\underline{\mu}^{(k)}$  est suffisamment proche de  $\underline{\mu}^{(k-1)}$  ; alors, on fait la normalisation :

$$\underline{\mu}^{(k)} := \frac{T}{T(\underline{\mu})} \cdot \underline{\mu}^{(k)}.$$

Nous avons testé cet algorithme dans de nombreux cas et il n'a pas toujours convergé. Dans les cas de non convergence, nous avons considéré le problème de la détermination du réseau homogène comme un problème d'optimisation, de la façon suivante :

Soit la fonction d'objectif  $h$  définie par :

$$h: \mathbb{R}_{*+}^{MN} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\underline{\mu} \mapsto h(\underline{\mu}) = \|\underline{\mu} - \emptyset(\underline{\mu})\|$$

Nous cherchons un vecteur  $\underline{\mu}^*$  réalisant le minimum de  $h$  ; plus techniquement, nous avons utilisé une procédure générale d'optimisation prise dans la bibliothèque N.A.G. [NAG], et pour éviter les problèmes d'échelle nous avons utilisé comme fonction d'objectif :

$$h' : \{\underline{\mu} > 0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\underline{\mu} \mapsto h'(\underline{\mu}) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq M} \left[ \frac{p_i(n-1) \lambda_i^{\underline{\mu}}(n-1)}{p_i(n) \mu_i(n)} - 1 \right]^2$$

Remarquer que si  $H(R)$  existe, alors  $h(\underline{\mu}^*) = h'(\underline{\mu}^*) = 0$ .

Avec cette procédure, nous avons toujours trouvé un réseau homogène et un seul, en prenant différents points initiaux. De la même façon, dans les cas de convergence de l'algorithme précédent, nous avons obtenu toujours la même solution avec différents vecteurs  $\underline{\mu}^{(0)}$ . Ces résultats confortent la conjecture de l'unicité.

Nous allons maintenant considérer un peu plus en détail le premier algorithme. Tout d'abord, on peut étudier analytiquement son comportement dans les deux cas limites examinés dans la section 5.

#### Le cas $N=1$

Il est clair que dans ce cas  $\underline{\mu}^{(0)}$ , tel qu'il est défini par l'algorithme, est point fixe de  $\emptyset$ , et alors :

$$\underline{\mu}^{(1)} = \emptyset(\underline{\mu}^{(0)}) = \underline{\mu}^{(0)}; \quad \text{de plus } \underline{\mu}^{(0)} \in D(T);$$

l'algorithme donne le réseau homogène (qui est le réseau original) en une itération.

#### Le cas $M=2$

Dans ce cas, nous allons montrer que si  $N > 1$ , l'algorithme ne converge jamais.

La fonction d'erreur est :

$$ERR(k) \triangleq \sum_{\substack{i, n / \\ 1 \leq i \leq M, \\ 1 \leq n \leq N}} \left[ \frac{\mu_i^{(k)}(n) - \mu_i^{(k-1)}(n)}{\mu_i^{(k-1)}(n)} \right]^2 \quad k \geq 1$$

Reprenons la notation de la section 5.2., et soit

$$A(n) \triangleq \frac{a(n-1)}{a(n)}, \quad B(n) \triangleq \frac{b(n-1)}{b(n)} \quad \text{pour } n=1, 2, \dots, N$$

La récurrence  $\underline{\mu}^{(k)} = \emptyset (\underline{\mu}^{(k-1)})$  s'écrit ici :

$$\left. \begin{aligned} \mu_1^{(k)}(n) &\triangleq A(n) \frac{x_1}{x_2} \mu_2^{(k-1)}(N-n+1) \\ \mu_2^{(k)}(n) &\triangleq B(n) \frac{x_2}{x_1} \mu_1^{(k-1)}(N-n+1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } n=1,2,\dots,N \\ k>1 \end{array}$$

Ceci entraîne :

$$\mu_1^{(2k)}(n) = \mu_1^{(0)}(n) [A(n)B(N-n+1)]^k$$

$$\mu_2^{(2k)}(n) = \mu_2^{(0)}(n) [B(n)A(N-n+1)]^k$$

et

$$\mu_1^{(2k+1)}(n) = \frac{x_1}{x_2} A(n) \mu_2^{(0)}(N-n+1) [A(n)B(N-n+1)]^k$$

$$\mu_2^{(2k+1)}(n) = \frac{x_2}{x_1} B(n) \mu_1^{(0)}(N-n+1) [B(n)A(N-n+1)]^k$$

pour  $n=1,2,\dots,N$ , et  $k \geq 0$ .

Or, il est immédiat que :

$$[b(n)=a(N-n) \text{ pour } n=0,1,\dots,N] \Leftrightarrow [A(\ell)B(N-\ell+1)=1 \text{ pour } \ell=1,2,\dots,N]$$

Par conséquent :

$$\mu_1^{(2k)}(n) = \mu_1^{(0)}(n), \mu_2^{(2k)}(n) = \mu_2^{(0)}(n)$$

$$\mu_1^{(2k+1)}(n) = \frac{x_1}{x_2} A(n) \mu_2^{(0)}(N-n+1), \mu_2^{(2k+1)}(n) = \frac{x_2}{x_1} B(n) \mu_1^{(0)}(N-n+1)$$

pour  $n=1,2,\dots,N$  et  $\forall k \geq 0$ .

On voit que l'algorithme oscille entre deux vecteurs, l'un d'eux étant  $\underline{\mu}^{(0)}$ . Le seul moyen d'avoir convergence est de partir de la solution.

$$\text{Si } \mu_i^{(0)}(n) = \frac{1}{s_i} \text{ pour } i=1, \dots, M \\ n=1, \dots, N,$$

On aura :

$$\mu_i^{(2k)}(n) = \frac{1}{s_i} \text{ et } \mu_i^{(2k+1)}(n) = \frac{x_i}{x_{3-i}} \frac{p_i(n-1)}{p_i(n)} \frac{1}{s_{3-i}}$$

pour  $i=1, \dots, M$   
 $n=1, \dots, N,$   
 et  $\forall k \geq 0.$

La fonction d'erreur donne  $\forall k \in \mathbb{N}_*$  ( $k$  pair ou impair) :

$$\text{ERR}(k) = \sum_{1 \leq n \leq N} \left[ \frac{x_1}{x_2} A(n) \frac{\mu_2^{(0)}(N-n+1)}{\mu_1^{(0)}(n)} - 1 \right]^2 + \sum_{1 \leq n \leq N} \left[ \frac{x_2}{x_1} B(n) \frac{\mu_1^{(0)}(N-n+1)}{\mu_2^{(0)}(n)} - 1 \right]^2$$

donc,  $\text{ERR}(k) = \text{cte.}$ , indépendante de  $k$ ,  $\forall k \geq 1.$

Dans les cas de non convergence, nous avons toujours constaté le même phénomène d'oscillation : il existe deux vecteurs  $\underline{\mu}_1$  et  $\underline{\mu}_2$  dans  $D(T)$  tels que l'algorithme oscille asymptotiquement entre un vecteur colinéaire avec  $\underline{\mu}_1$ , et un vecteur colinéaire avec  $\underline{\mu}_2$ . Plus précisément, pour certains réseaux, on a trouvé (numériquement) deux vecteurs  $\underline{\mu}_1$  et  $\underline{\mu}_2$  dans  $D(T)$  tels que :

$$\phi(\underline{\mu}_1) = \alpha \underline{\mu}_2$$

$$\text{et } \phi(\underline{\mu}_2) = \beta \underline{\mu}_1$$

Supposons qu'on prenne comme vecteur initial  $\underline{\mu}^{(0)} = \underline{\mu}_1$ . Alors, on obtiendra :

$$\underline{\mu}^{(2k)} = \alpha^k \beta^k \underline{\mu}_1 \text{ et } \underline{\mu}^{(2k+1)} = \alpha^{k+1} \beta^k \underline{\mu}_2, \forall k \geq 0$$

La fonction d'erreur oscille aussi entre deux constantes indépendantes de  $k$  :

$$\begin{aligned} \text{ERR}(2k) &= \sum_{i,n} \left[ \frac{\alpha^{k\beta k} \mu_1(i,n) - \alpha^{k\beta k-1} \mu_2(i,n)}{\alpha^{k\beta k-1} \mu_2(i,n)} \right]^2 \\ &= \sum_{i,n} \left[ \frac{\beta \mu_1(i,n) - \mu_2(i,n)}{\mu_2(i,n)} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\text{de même, } E(2k-1) = \sum_{i,n} \left[ \frac{\alpha \mu_2(i,n) - \mu_1(i,n)}{\mu_1(i,n)} \right]^2$$

ceci  $\forall k \geq 1$  ;  $\mu_\ell(i,n)$  désigne ici le taux de service de la station  $i$  lorsqu'elle contient  $n$  clients, correspondant au vecteur  $\underline{\mu}_\ell$ , pour  $\ell=1$  ou  $2$ .

Pour conserver un même ordre de grandeur dans les taux, nous avons considéré la variante suivante de l'algorithme :

on prend  $\underline{\mu}^{(-1)}$  définit par :  $\mu_i^{(-1)}(n) \triangleq \frac{1}{s_i}$  pour  $i=1, \dots, M$   
 $n=1, \dots, N$

ensuite,  $\underline{\mu}^{(0)} \triangleq \frac{T}{T(\underline{\mu}^{(-1)})} \cdot \underline{\mu}^{(-1)}$  ( $\underline{\mu}^{(0)} \in D(T)$ )

et la récurrence est donnée par :

$$\underline{\mu}^{(k)} \triangleq \frac{T}{T(\underline{\mu}^{(k-1)})} \cdot \underline{\mu}^{(k-1)} \quad \forall k \geq 1$$

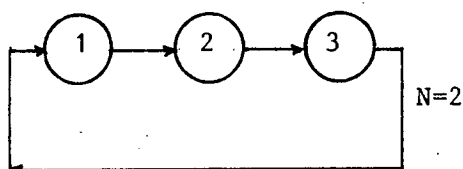
i.e., on normalise à chaque itération. Cette variante n'a pas modifié le comportement de l'algorithme : les deux versions convergent ou divergent simultanément.

On peut signaler que toujours dans le cas de non convergence, si on part d'un  $\underline{\mu}^{(0)}$  proche de la solution, l'algorithme converge ; en prenant des vecteurs initiaux de plus en plus éloignés de la solution, on dépasse à un certain moment un "seuil" de convergence et le phénomène d'oscillation apparaît.

# Exemple 1

Etant donné le coût élevé pour obtenir les paramètres exacts d'un réseau R général via le processus markovien associé, pour l'étude de ce problème de convergence nous avons aussi utilisé la procédure suivante : on se donne un réseau G-N avec taux de service  $\underline{\mu}$ , on calcule les distributions marginales, les moyennes de service et le flux absolu, et on applique l'algorithme itératif pour essayer de récupérer en sortie le même vecteur  $\underline{\mu}$ .

Ainsi, si on considère le réseau suivant :



avec taux de service :

station i	$\mu_i(1)$	$\mu_i(2)$
1	0.1	1
2	0.5	1
3	1	0.1

on obtient :  $T = 0.2407$

$$S_1=3.077 \quad S_2=1.846 \quad S_3=1.692$$

distributions marginales : station i	$p_i(0)$	$p_i(1)$	$p_i(2)$
1	.259	.556	.185
2	.556	.407	.037
3	.593	.222	.185

Pour ce réseau, l'algorithme itératif ne converge pas ; les vecteurs  $\underline{\mu}_1$  et  $\underline{\mu}_2$  de  $D(0.2407)$  sont :

$\underline{\mu}_1$ : station i	$\mu_i(1)$	$\mu_i(2)$
1	0.063	1.252
2	0.228	6.872
3	2.291	1.063

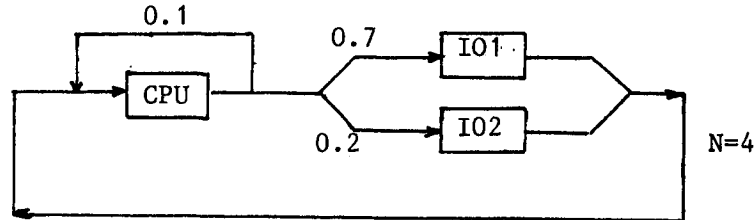
$\underline{\mu}_2$ : station i	$\mu_i(1)$	$\mu_i(2)$
1	1.672	1.367
2	3.592	1.480
3	1.550	0.130



Soit  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $\phi(\underline{\mu}_1) = \alpha \underline{\mu}_2$  et  $\phi(\underline{\mu}_2) = \beta \underline{\mu}_1$  ; on a :  $\alpha = 0.4543$   
 $\beta = 1.2876$

## Exemple 2

Nous donnons enfin un réseau général pour lequel l'algorithme itératif ne converge pas.



Le temps de service dans la station CPU suit une loi  $H_2$  (hyperexponentielle d'ordre 2) avec moyenne 1 et carré du coefficient de variation égal à 25 ; le temps de service en IO1 (resp. IO2) suit une loi Erlang-2 de moyenne 2 (resp. 10). Il y a 4 clients dans le réseau.

Les distributions marginales sont :

	0	1	2	3	4
CPU	.600	.184	.060	.040	.116
IO1	.440	.240	.166	.107	.047
IO2	.201	.169	.209	.242	.180

$$\underline{x} = (10/19, 7/19, 2/19) \quad T = 0.7594$$

Les vecteurs  $\underline{\mu}_1$  et  $\underline{\mu}_2$  sont :

	1	2	3	4
CPU	115.7	39.26	4.080	.2528
IO1	99.35	33.19	12.11	1.744
IO2	23.03	7.217	2.814	.5017

	1	2	3	4
CPU	.5195	2.814	3.038	1.284
IO1	.02546	.4203	2.058	5.323
IO2	.004165	.06200	.3675	.9959

L'application d'une méthode générale d'optimisation nous donne  $H(R)$  avec le vecteur  $\underline{\mu}$  suivant :

	1	2	3	4
CPU	1.606	1.244	.5056	.07982
IO1	.5747	.4626	.4202	.4279
IO2	.06448	.08624	.1025	.1461

## 10. CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons pu regarder en détail le problème du réseau homogène dans certains cas limites ( $N=1$  ;  $M=2$  ;  $M=3$  et  $N=2$ ) qui nous permettent de mieux comprendre les phénomènes en présence grâce à quelques résultats analytiques exacts. La présentation du problème comme un problème de point fixe est d'intérêt et peut être utilisée pour examiner les réseaux multiclassés de la même façon. Le théorème 1 qui établit l'unicité de la forme produit par rapport à la distribution jointe (quand le nombre de stations est plus grand que deux) peut nous donner une autre voie, via (6), d'obtenir la preuve de l'unicité du réseau homogène.

---

BIBLIOGRAPHIE :

- [Bal79] G. Balbo : "Approximate Solutions of Queueing Networks Models of Computer Systems", PhD Thesis, Purdue University, 1979.
- [GoN67] W.L. Gordon and G.F. Newell : "Closed Queueing Systems with Exponential Servers", Operations Research, 15(2) p.254-265, 1967.
- [Mar79] R. Marie : "An Approximate Analytical Method for General Queueing Networks", IEEE-TSE, vol. SE-9 n°5 p. 530-538, 1979.
- [NaG] Numerical Algorithms Group Ltd.  
NAG Central Office : Mayfield House, 256 Banbury Road, Oxford  
OX2 7DE, U.K.
- [Shu76] A.W. Shum : "Queueing Models for Computer Systems with General Service Time Distributions", PhD Thesis, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1976.

## ANNEXE A

## Preuve du Théorème 1

Soit R un réseau de type G-N avec M stations, une certaine topologie et le vecteur  $\underline{x}$  associé, N clients, et une distribution jointe stationnaire  $\pi$ . Il s'agit de montrer comment obtenir le vecteur  $\underline{\mu}$  à partir de la connaissance de  $\pi(\underline{n}), \forall \underline{n} \in E$ .

Comme R est un réseau G-N, on sait qu'il existe un vecteur  $\underline{\mu} > 0$  des taux de service qui satisfait le système  $\{A1, A2, A3\}$  suivant :

$$(A1) \quad \pi(\underline{n}) = \frac{1}{F} \prod_{i=1}^M f_i(n_i) \quad \forall \underline{n} \in E$$

où, pour  $i=1, 2, \dots, M$  :

$$(A2) \quad f_i(n) \triangleq \prod_{k=1}^n \frac{x_i}{\mu_i(n)} \quad \text{pour } n=1, 2, \dots, N; \quad f_i(0) \triangleq 1$$

$$(A3) \quad \text{et où } F \triangleq \sum_{\underline{n} \in E} \left( \prod_{i=1}^M f_i(n_i) \right) \text{ est la constante de normalisation.}$$

Remarquer que si  $\underline{\mu}$  est solution de ce système, alors,  $\forall \alpha > 0$ , le vecteur  $\alpha \underline{\mu}$  aussi ; ainsi nous pouvons normaliser la solution, par exemple en fixant arbitrairement la valeur de  $\mu_1(1)$ , ou de façon équivalente, de  $f_1(1)$ .

Considérons, d'abord, le cas  $M > 2$ .

Nous savons donc, qu'il existe une solution  $\underline{\mu}$  au système  $\{A1, A2, A3\}$ . Il faut prouver qu'il n'existe pas d'autre solution possédant la même valeur de  $\mu_1(1)$ . Etant donné la définition des  $f_i$ , il est équivalent de prouver qu'il n'existe pas d'autre ensemble  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  solution de  $\{A1, A3\}$  avec la même valeur de  $f_1(1)$ .

En effet, si  $\underline{\mu}$  est solution de  $\{A1, A2, A3\}$  avec  $\mu_1(1)$  fixé, (A2) impose la valeur des  $f_i$  ; réciproquement, si  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  est la seule solution de  $\{A1, A3\}$  avec  $f_1(1)$  fixé, on construit univoquement les  $\mu_i(.)$  par :

$$\mu_i(n) = \frac{f_i(n-1)}{f_i(n)} x_i \quad \begin{array}{l} \text{pour } i=1, 2, \dots, M, \\ n=1, 2, \dots, N. \end{array}$$

Là encore,  $\underline{e}_i$  désigne le vecteur  $(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{iM})$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ .  
On remarque d'abord que si  $i, j, k$  désignent trois stations différentes du réseau ( $M \geq 3$ ), alors, à cause de la formule produit, on a :

$$\frac{\pi[\underline{n} \underline{e}_i + (N-n)\underline{e}_k]}{\pi[\underline{n} \underline{e}_j + (N-n)\underline{e}_k]} = \frac{f_i(n)}{f_j(n)} \quad \text{pour } n=0, 1, \dots, N$$

Remarquons que ce rapport ne dépend pas de  $k$  si  $k$  est différent de  $i$  et de  $j$ .

Pour  $j=1$ , on définit :

$$(A4) \quad a_i(n) \triangleq \frac{\pi[\underline{n} \underline{e}_i + (N-n)\underline{e}_k]}{\pi[\underline{n} \underline{e}_1 + (N-n)\underline{e}_k]} \quad \begin{array}{l} \text{pour } n=0, 1, \dots, N \\ i=2, 3, \dots, M \\ k \text{ quelconque dans } \{1, \dots, M\} - \{1, i\} \end{array}$$

Noter que  $a_i(0)=1$ .

Alors  $f_i(n) = a_i(n) f_1(n)$  pour  $i=2, 3, \dots, M$   
 $n=0, 1, \dots, N$

Par conséquent, si  $f_1$  est unique,  $f_i$  est unique  $\forall i$ . De plus, on sait déterminer les  $f_i$  en fonction de  $f_1$ .

Pour  $n=1, 2, \dots, N$ , on définit aussi :

$$(A5) \quad b(n) \triangleq \frac{\pi[\underline{n} \underline{e}_1 + (N-n)\underline{e}_k] \pi[\underline{e}_j + (N-1)\underline{e}_k]}{\pi[(n-1)\underline{e}_1 + \underline{e}_j + (N-n)\underline{e}_k] \pi[\underline{e}_1 + (N-1)\underline{e}_k]}$$

avec  $j \neq k$ ,  $j \neq 1$ ,  $k \neq 1$

Remarquer que  $b(1)=1$ .

Alors, de (A1) nous avons :

$$f_1(n) = b(n) f_1(n-1) f_1(1) \quad \text{pour } n=1, 2, \dots, N.$$

Pour  $n=2$ , ceci donne :  $f_1(2) = b(2) f_1^2(1)$ .

On définit encore :  $c(n) = \prod_{\ell=1}^n b(\ell)$  pour  $n=1, 2, \dots, N$  ;  $c(0) \triangleq 1$

Remarque :  $c(1)=b(1)=1$ .

On voit facilement par récurrence, que :

$$f_1(n)=c(n)f_1^n(1) \text{ pour } n=1,2,\dots,N$$

En résumé, la solution  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  de  $\{A1, A3\}$  doit vérifier :

$$f_i(n)=d_i(n) f_1^n(1) \text{ pour } i=1,\dots,M, \\ n=0,1,\dots,N$$

$$\text{où } d_i(n) = \begin{cases} c(n) & \text{si } i=1 \\ a_i(n)c(n) & \text{si } i>1 \end{cases} \text{ pour } n=0,1,\dots,N$$

(voir que  $d_i(0)=1$ )

Donc, si on fixe  $f_1(1)$  la solution est unique et on sait la déterminer.

La construction des  $d_i(n)$  est possible grâce au fait que la distribution  $\pi$  est de forme produit par hypothèse, et aussi à cause de la condition  $M \geq 3$ , condition nécessaire pour écrire (A4) et (A5).

Si  $M=2$ ,  $\underline{n} \in E$  nous avons :  $\pi(n_1, n_2)=p_1(n_1)=p_2(n_2)$ .

D'après la section 5.2., si  $N>1$  il existe une infinité de réseaux G-N avec des taux de service non colinéaires entre eux, N clients, même vecteur  $\underline{x}$  et mêmes distributions marginales  $p_1, p_2$ , donc même distribution jointe  $\pi$ .

Si  $M=2$  et  $N=1$  on a évidemment un seul réseau G-N avec le vecteur  $\underline{x}$  donné et distribution jointe  $\pi$  (cf. section 5.1.), à une constante multiplicative près pour les taux de service.

# ANNEXE B

D'abord il faut vérifier que l'algorithme du théorème 1 définit un vecteur  $\underline{\mu}$  sans ambiguïté (à une constante multiplicative près). Autrement dit, il faut vérifier que les coefficients  $a_i(n)$  et  $b(n)$  sont bien définis (cf. Annexe A).

Comme  $M=3$ , il n'y a pas de choix pour l'indice  $k$  dans la construction des  $a_i(n)$  pour  $i=2,3$  et  $n=0,1,2$ , car  $k \in \{2,3\} - \{i\}$ , i.e.  $k=5-i$ . Par conséquent, les  $a_i$  sont construites à partir de  $\pi$  sans ambiguïté.

Pour  $b(n)$ , comme  $N=2$  et comme  $b(1)$  est toujours égal à l'unité, il faut seulement regarder la détermination de  $b(2)$ , qui s'écrit dans ce cas :

$$b(2) = \frac{\pi(2e_1)\pi(e_j+e_k)}{\pi(e_1+e_j)\pi(e_1+e_k)} \quad j \neq 1, k \neq 1, j \neq k ;$$

Cette expression est symétrique par rapport à  $j$  et  $k$ , car  $M=3$  ; i.e. les deux choix possibles  $j=2/k=3$  ou  $j=3/k=2$  donnent la même valeur de  $b(2)$  ; donc  $b(2)$  est aussi calculable sans ambiguïté.

Alors, on peut déterminer un vecteur  $\underline{\mu}$  à partir de  $\pi$ , même si on ne sait pas encore si  $\pi$  est une forme produit.

D'après l'annexe A, nous avons :

$$\mu_1(2) = \frac{\pi(e_1+e_k)\pi(e_1+e_j)}{\pi(e_j+e_k)\pi(2e_1)} \gamma = \frac{d_2 d_3}{2d_1 p_1(2)} \gamma \quad (k \neq 1, j \neq 1, k \neq j)$$

$$\text{où } \gamma = \mu_1(1)$$

pour  $i=2,3$  :

$$\mu_i(1) = \frac{\pi(e_1+e_k)}{\pi(e_i+e_k)} \frac{x_i}{x_1} \gamma = \frac{d_i x_i}{d_1 x_1} \gamma \quad k \neq 1, i$$

$$\mu_i(2) = \frac{\pi(e_1+e_i)}{\pi(2e_i)} \frac{x_i}{x_1} \gamma = \frac{d_k x_i}{2x_1 p_i(2)} \gamma \quad k \neq 1, i$$

Avant de regarder si le réseau  $\varepsilon(\underline{\mu})$  de type G-N a la distribution jointe  $\pi$ , nous allons normaliser  $\underline{\mu}$  pour que la condition (C4) soit vérifiée, i.e. nous allons déterminer  $\gamma$  tel que  $\underline{\mu} \in D(T)$ .

La condition (C4) peut s'écrire :

$$\mu_1(1)p_1(1) + \mu_1(2)p_1(2) = Tx_1$$

ce qui donne :

$$\gamma p_1(1) + \frac{d_2 d_3}{2d_1} \gamma = Tx_1$$

et donc pour  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{2T d_1 x_1}{D} \quad \text{où } D = d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3$$

Alors, on obtient pour  $\underline{\mu}$  :

$$\mu_i(1) = \frac{2Tx_i d_i}{D} \quad \text{pour } i=1,2,3$$

$$\mu_i(2) = \frac{Tx_i}{D p_i(2)} \quad d_j d_k \quad \text{pour } i=1,2,3 \\ j \neq i, k \neq i, j \neq k$$

Il nous reste à vérifier que  $\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R)$ . A partir de  $\underline{\mu}$  on obtient :

$$(*) \quad f_i(1) = \frac{D}{2T} \frac{1}{d_i} \quad , \quad f_i(2) = \frac{D^2 p_i(2)}{2T^2 d_1 d_2 d_3} \quad \text{pour } i=1,2,3$$

$$F = \sum_{i,j/i < j} f_i(1) f_j(1) + \sum_k f_k(2)$$

$$= \left(\frac{D}{2T}\right)^2 \cdot \sum_{i,j/i < j} \frac{1}{d_i d_j} + \frac{D^2}{2T^2} \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \cdot \sum_k p_k(2)$$

$$\text{Or, } \sum_{i,j/i < j} \frac{1}{d_i d_j} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1 d_2 d_3} = \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \sum_k p_k(1)$$

donc,



$$F = \frac{D^2}{4T^2} \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \sum_k p_k(1) + \frac{D^2}{2T^2} \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \sum_k p_k(2)$$

$$= \frac{D^2}{4T^2 d_1 d_2 d_3} \cdot \sum_k [p_k(1) + 2p_k(2)]$$

mais nécessairement  $\sum_k [p_k(1) + 2p_k(2)] = 2$ , et alors :

$$(**) \quad F = \frac{D^2}{2T^2 d_1 d_2 d_3}$$

Soit  $\pi'$  la distribution jointe de  $\varepsilon(\underline{\mu})$  ; alors, d'après (\*) et (\*\*):

$$\pi'(2\underline{e}_i) = \frac{1}{F} f_i(2) = p_i(2) = \pi(2\underline{e}_i) \text{ pour } i=1,2,3$$

$$\pi'(\underline{e}_i + \underline{e}_j) = \frac{1}{F} f_i(1) f_j(1) = \frac{d_k}{2} = \pi(\underline{e}_i + \underline{e}_j) \quad i \neq j \quad (k \neq i, k \neq j) \text{ (cf. section 7)}$$

donc  $\pi' \equiv \pi$ , ce qui entraîne que  $\varepsilon(\underline{\mu}) = H(R)$ .

---

### ANNEXE C

Nous allons rappeler ici brièvement le principe des deux méthodes approchées considérées, et nous allons calculer les paramètres des réseaux G-N qu'elles donnent comme approximation de  $R_3$ .

#### C.1) Méthode itérative de R. Marie [Mar79]

On construit une suite de réseaux G-N qu'on note  $R^{(k)}$   $k=0,1,2,\dots$  et on s'arrête dès que  $R^{(k)}$  est suffisamment proche de  $R^{(k-1)}$ .

$\forall k \geq 0, R^{(k)}$  est un réseau avec la même topologie que  $R$  et le même nombre  $N$  de clients ; si  $\underline{\mu}^{(k)}$  est son vecteur des taux de service, on a d'abord :

$$\mu_i^{(0)}(n) \triangleq \frac{1}{S_i} \text{ pour } i=1,2,\dots,M \\ n=1,2,\dots,N ;$$

ensuite, pour  $k \geq 1$ , on détermine  $\underline{\mu}^{(k)}$  à partir de  $\underline{\mu}^{(k-1)}$  de la façon suivante :

Si  $\lambda_i^{(k-1)}(.)$  désigne le taux conditionnel d'arrivée à la station  $i$  dans le réseau  $R^{(k-1)}$ , alors pour  $i=1,2,\dots,M$   $\mu_i^{(k)}(.)$  est le taux de service conditionnel correspondant à la file d'attente  $\lambda_i^{(k-1)}/G_i/1/N$  où  $G_i$  est la loi de service dans la station  $i$  de  $R$ .

Dans le cas du réseau  $R_3$ , remarquons d'abord que par symétrie  $\mu_i^{(k)}(.) = \mu_j^{(k)}(.)$  et  $\lambda_i^{(k)}(.) = \lambda_j^{(k)}(.)$   $i,j$  ; notons  $\mu^{(k)}(.) = \mu_i^{(k)}(.)$  et  $\lambda_i^{(k)}(.) = \lambda^{(k)}(.)$  pour  $i=1,2,3$ . Ensuite, si on étudie la file  $\lambda(n)/E_2(\eta)/1/2$ , le taux de service conditionnel est donné par :

$$v(1) = \frac{\eta^2}{\lambda(1)+2\eta} , \quad v(2) = \frac{\eta^2}{2\eta-v(1)}$$

En outre, il est immédiat de voir que dans le réseau  $R_3^{(k)}$ , on a :

$$\lambda^{(k)}(1) = \frac{1}{2} \mu^{(k)}(1)$$

Tout ceci donne :

$$\mu^{(k)}(1) = \frac{\eta^2}{\frac{1}{2} \mu^{(k-1)}(1) + 2\eta}, \quad \mu^{(k)}(2) = \frac{\eta^2}{2\eta - \mu^{(k)}(1)}$$

Si on note  $a_k \triangleq \mu^{(k)}(1)$  et  $b_k \triangleq \mu^{(k)}(2)$   $k \geq 0$ , il faut étudier la récurrence :

$$a_k = \frac{\eta^2}{\frac{1}{2} a_{k-1} + 2\eta} \quad k \geq 1, \quad a_0 = \frac{\eta}{2}$$

$$b_k = \frac{\eta^2}{2\eta - a_k} \quad k \geq 1, \quad b_0 = \frac{\eta}{2}$$

Etude de la suite  $(a_k)_{k \geq 0}$

(i) Si on explicite la dépendance vis à vis de  $\eta$ , i.e.  $a_k = a_k(\eta)$ , on a :

$$a_k(\eta) = \eta a_k(1) \quad \forall k \geq 0$$

La preuve est immédiate par récurrence : étant vraie pour  $k=0$ , si on suppose la propriété vraie pour  $k=0, 1, \dots, \ell-1$ , pour  $k=\ell$  on a :

$$a_\ell(\eta) = \frac{\eta^2}{\frac{1}{2} a_{\ell-1}(\eta) + 2\eta} = \frac{\eta^2}{\frac{1}{2} \eta a_{\ell-1}(1) + 2\eta} = \frac{\eta}{\frac{1}{2} a_{\ell-1}(1) + 2} = \eta a_\ell(1)$$

(ii) Il suffit donc d'étudier la suite  $y_k \triangleq a_k(1)$   $k \geq 0$ .

$$y_0 = \frac{1}{2}, \quad y_k = \frac{1}{\frac{1}{2} y_{k-1} + 2} \quad k \geq 1$$

Remarquons d'abord que  $\forall k \geq 1, y_k \in (0, \frac{1}{2})$

Si  $y \triangleq \lim_k y_k$  existe, on a :

$$\left[ y = \frac{1}{\frac{1}{2}y + 2} \text{ et } y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right] \Rightarrow y = \sqrt{6} - 2$$

Enfin, il est simple de vérifier par récurrence que :

$(y_{2\ell})_{\ell \geq 1}$  est strictement croissante,  $(y_{2\ell-1})_{\ell \geq 1}$  est strictement décroissante, et

$$\forall k \geq 1, \forall \ell \geq 1, y_{2k} < \sqrt{6} - 2 < y_{2\ell-1}$$

alors, les deux suites sont convergentes, et on trouve de façon immédiate que :

$$\lim_{k \geq 1} y_{2k} = \lim_{\ell \geq 1} y_{2\ell-1} = \sqrt{6} - 2$$

Donc, le réseau  $R_3^{(\infty)}$  est caractérisé par :

$$\mu_i^{(\infty)}(1) = (\sqrt{6} - 2)\eta$$

$$\mu_i^{(\infty)}(2) = \frac{\eta^2}{2\eta - (\sqrt{6} - 2)\eta} = \frac{1}{4 - \sqrt{6}} \eta$$

## C.2) La méthode E.P.F. de A. Shun [Shu76]

On peut présenter la méthode E.P.F. (Extended Product Form) de la façon suivante :

Soit un réel  $t > 0$  ; pour  $i = 1, 2, \dots, M$  on considère la file d'attente  $M/G_i/1/N$  où  $G_i$  est la loi de service dans la station  $i$  de  $R$ , et où le taux d'arrivée est constant et égal à  $\lambda_i$  tant qu'il y a moins de  $N$  clients dans la file, 0 sinon. Si  $v_i(\cdot)$  est le taux de service conditionnel pour cette file, on construit le réseau  $G-N$  qu'on note  $\varepsilon(\underline{v}^t)$  ayant la même topologie que  $R$ ,  $N$  clients et des taux de service  $v_i^t(\cdot)$ ,  $1 \leq i \leq M$ . Dans  $\varepsilon(\underline{v}^t)$ , le temps moyen de service dans la station  $i$  est  $S_i^t$ , différent de  $S_i$ , la moyenne de la loi  $G_i$  :

$$S_i^t = \frac{1 - p_i^t(0)}{T_i^t} \text{ où } T_i^t = \sum_{1 \leq n \leq N} p_i^t(n) v_i^t(n)$$

On définit la fonction d'objectif  $s$  suivante :

$$\forall t > 0, s(t) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq M} (S_i^t - S_i)^2$$

Alors, on cherche  $t^*$  réalisant le minimum de  $s$  sur  $\{t>0\}$ , et le réseau considéré comme approximation de  $R$  sera  $\varepsilon(\underline{v}^{t^*})$ .

Dans le cas du réseau  $R_3$ , on prendra d'abord comme vecteur  $\underline{x}$  le vecteur  $(1,1,1)$  pour alléger l'écriture ; il faut de nouveau considérer la file  $\lambda(n)/E_2(n)/1/2$  ou  $\lambda(0)=\lambda(1)=t$  ( $\lambda(2)=0$ ) ; on obtient pour le taux de service :

$$v_i^t(1)=v^t(1)=\frac{\eta^2}{t+2\eta}, \quad v_i^t(2)=v^t(2)=\frac{\eta^2}{2\eta-v^t(1)} \quad i=1,2,3$$

Une fois les calculs faits dans  $\varepsilon(\underline{v}^t)$ , on obtient comme temps moyen de service :

$$s_i^t = s^t = \frac{2t^2+10\eta t+11\eta^2}{3\eta^2(t+2\eta)} \quad i=1,2,3$$

$$\text{Alors, } s(t)=3\left(s^t - \frac{2}{\eta}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dt}(t)=3\left(s^t - \frac{2}{\eta}\right) \frac{d}{dt} s^t.$$

$$\text{Or, } \frac{d}{dt} s^t = \frac{2t^2+8\eta t+9\eta^2}{(t+2\eta)^2} > 0 \text{ sur } \{t>0\}$$

$$\text{Donc, } \left[\frac{ds}{dt}(t)=0\right] \Leftrightarrow \left[s^t = \frac{2}{\eta}\right]$$

$$\text{Comme } s^t - \frac{2}{\eta} = \frac{2t^2+4\eta t-\eta^2}{3\eta^2(t+2\eta)},$$

$$\left[s^t - \frac{2}{\eta} = 0\right] \Leftrightarrow [2t^2+4\eta t-\eta^2=0] \Leftrightarrow \left[t = \eta(-1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2})\right]$$

$$\text{Alors, } \frac{ds}{dt} \text{ s'annule sur } R_+ \text{ pour } t^* = \eta \cdot \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

Les taux de service  $\varepsilon(\underline{v}^{t^*})$  sont :

$$\mu_i(1) = \frac{\eta^2}{t^*+2\eta} = \eta(\sqrt{6}-2)$$

$i=1,2,3$

$$\mu_i(2) = \frac{\eta^2}{2\eta-\mu_i(1)} = \frac{1}{4-\sqrt{6}} \eta.$$

# Liste des Publications Internes IRISA

- PI 180 **Traitements de textes et manipulations de documents : bibliographie analytique**  
J. André , 20 pages ; Septembre 1982
- PI 181 **Algorithme assurant l'insertion dynamique d'un processeur autour d'un réseau à diffusion et garantissant la cohérence d'un système de numérotation des paquets global et réparti**  
Annick Le Coz, Hervé Le Goff, Michel Ollivier , 31 pages ; Octobre 1982
- PI 182 **Interprétation non linéaire d'un coefficient d'association entre modalités d'une juxtaposition de tables de contingence**  
Israël César Lerman , 34 pages ; Novembre 1982
- PI 183 **L'IRISA vu à travers les stages effectués par ses étudiants de DEA (1<sup>è</sup> année de thèse)**  
Daniel Herman , 41 pages ; Novembre 1982
- PI 184 **Commande non linéaire robuste des robots manipulateurs**  
Claude Samson , 52 pages ; Janvier 1983
- PI 185 **Dialogue et représentation des informations dans un système de messagerie intelligent**  
Philippe Besnard, René Quiniou, Patrice Quinton, Patrick Saint-Dizier, Jacques Siroux, Laurent Trilling , 45 pages ; Janvier 1983
- PI 186 **Analyse classificatoire d'une correspondance multiple ; typologie et régression**  
I.C. Lerman , 54 pages ; Janvier 1983
- PI 187 **Estimation de mouvement dans une sequence d'images de télévision en vue d'un codage avec compensation de mouvement**  
Claude Labit , 132 pages ; Janvier 1983
- PI 188 **Conception et réalisation d'un logiciel de saisie et restitution de cartes élémentaires**  
Eric Secher , 45 pages ; Janvier 1983
- PI 189 **Etude comparative d'algorithmes pour l'amélioration de dessins au trait sur surfaces point par point**  
M.A. ROY , 96 pages ; Janvier 1983
- PI 190 **Généralisation de l'analyse des correspondances à la comparaison de tableaux de fréquence**  
Brigitte Escofier , 35 pages ; Mars 1983
- PI 191 **Association entre variables qualitatives ordinales «nettes» ou «floues»**  
Israel-Cesar Lerman , 42 pages ; Mars 1983
- PI 192 **Un processeur intégré pour la reconnaissance de la parole**  
Patrice Frison , 80 pages ; Mars 1983
- PI 193 **The Systematic Design of Systolic Arrays**  
Patrice Quinton , 39 pages ; Avril 1983
- PI 194 **Régime stationnaire pour une file M/H/1 avec impatience**  
Raymond Marie et Jean Pellaumail , 8 pages ; Mars 1983
- PI 195 **SIGNAL : un langage pour le traitement du signal**  
Paul Le Guernic, Albert Benveniste, Thierry Gautier , 49 pages ; Mars 1983
- PI 196 **Algorithmes systoliques : de la théorie à la pratique**  
Françoise André, Patrice Frison, Patrice Quinton , 19 pages ; Mars 1983
- PI 197 **HAVANE : un système de mise en relation automatique de petites annonces**  
Patrick Bosc, Michèle Courant, Sophie Robin, Laurent Trilling , 79 pages ; Mai 1983
- PI 198 **Une procédure de décision en logique non-monotone**  
Philippe Besnard , 59 pages ; Mai 1983
- PI 199 **A formal proof system for infinitary rational expressions**  
Philippe Darondeau, Laurent Kott , 28 pages ; Mai 1983
- PI 200 **Etude générale d'un réseau constitué de deux stations hyperexponentielles**  
Jean-Yves Le Boudec , 12 pages ; Mai 1983
- PI 201 **Langage de Dyck et groupe symétrique**  
Yves Cochet , 13 pages ; Juin 1983
- PI 202 **On the observational semantics of pair parallelism**  
Philippe Darondeau, Laurent Kott , 14 pages ; Juin 1983
- PI 203 **Les langages fonctionnels : caractéristiques, utilisation et mise en œuvre**  
Daniel Le Métayer , 162 pages ; Juin 1983
- PI 204 **On exact and approximate iterative methods for general queueing networks**  
Raymond A. Marie, William J. Stewart , 27 pages ; Juin 1983
- PI 205 **On quantifier hierarchy and its paraphrase in a semantic representation of natural language sentences**  
Patrick Saint-Dizier , 17 pages ; Juillet 1983
- PI 206 **Trois articles sur le traitement adaptatif du signal pour l'encyclopédie Pergamon sur l'automatique**  
Albert Benveniste , 64 pages ; Septembre 1983
- PI 207 **Sur l'existence et l'unicité du réseau homogène à un réseau ferme de files d'attente à lois générales**  
Raymond Marie, Gérardo Rubino , 44 pages ; Septembre 1983

